Concursul interjudețean
“Gheorghe Lazăr” – Sibiu – 22.03.2003

Ediția a III-a

Clasa a X-a

- Soluții -

1. Avem $(z_1+\ldots+z_n)^2-(z_1^2+\ldots+z_n^2)=0$ sau $\sum_{1<j<k\le n} z_j z_k=0$. Dacă $|z|>1$, atunci

$$\sum_{1\le j<k\le n}|z-z_j||z-z_k| \ge \sum_{1\le j<k\le n}|z^2-z_jz-z_kz| \ge \left|\sum_{1\le j<k\le n}\left(z^2+z_jz_k-z(z_j+z_k)\right)\right| = C_n^2|z|^2 .$$

Dacă $|z|\le 1$, atunci, $\frac{1}{z_1}+\ldots+\frac{1}{z_n}=0$, $\frac{1}{z_1^2}+\ldots+\frac{1}{z_n^2}=0$ şi $\sum_{1\le j<k\le n}\frac{1}{z_jz_k}=0$, rezultă

$$\sum_{1<j<k\le n}|z-z_j||z-z_k| = \sum_{1\le j<k\le n}\left|\frac{z}{z_j}-1\right|\left|\frac{z}{z_k}-1\right| > \left|\sum_{1\le j<k\le n}\left(\frac{z^2}{z_jz_k}-z\left(\frac{1}{z_j}+\frac{1}{z_k}\right)+1\right)\right| - C_n^2 .$$

2. Vom arăta că locul geometric căutat este mulțimea $[A_1A_2\ldots A_n]$, adică poligonul reunit cu interiorul. Este evident că mijlocul segmentului PQ se află în $[A_1A_2\ldots A_n]$, deoarece această mulțime este convexă. Reciproc, fie O un punct arbitrar din $[A_1A_2\ldots A_n]$. Dacă O este unul dintre vârfurile A_i, luăm $P=Q=A_i$. Dacă O se află în interiorul unei laturi, atunci alegem P şi Q pe aceeaşi latură, simetrice față de O. Dacă O este interior poligonului $A_1A_2\ldots A_n$, construim poligonul $B_1B_2\ldots B_n$, simetric cu $A_1A_2\ldots A_n$ față de O. Deoarece O este interior celor două poligoane, rezultă cel puțin un punct care se află la intersecția acestor poligoane. Fie P un astfel de punct şi Q simetricul lui față de O. Re/ultă că şi Q se află la intersecția unor laturi din cele două poligoane. Atunci mijlocul segmentului PQ este O şi problema este rezolvată.

3. Aşezăm elementele mulțimii X într-un tablou şi observăm că dacă mulțimea A nu are elemente pe o linie sau pe o coloană a tabloului, atunci avem progresia căutată în $X-A$. Deci A trebuie să aibă elemente pe fiecare linie şi pe fiecare coloană. Dacă pe linia 1 are elementul i, atunci pe linia 2 trebuie să aibă un element înaintea coloanei i, în caz contrar, elementele dintre $i+1$ şi $i+n$, formează progresia de lungime n din mulțimea $X-A$. Pentru ca să îndeplinească aceste condiții, mulțimea A ar trebui să fie $\{n, 2n-1, \ldots, n^2-n+1\}$. Atunci $\{n-1, 2n-2, \ldots, n^2-2n+1, n^2-n\}\subset X-A$ şi formează progresia căutată.

1	2		n
$n+1$	$n+2$		$2n$
n^2-n+1			n^2

4. Fie $a_n = f(n) - f(n-1)$. Avem atunci (1): $f(n+p) = f(n) + \sum_{i=1}^{p} a_{n+i}$, $\forall\, p \in \mathbf{N}^*$ şi (2): $f(n-p) = f(n) - \sum_{i=0}^{p=1} a_{n+i}$.

Din ipoteză, $2f(n) \geq f(n+1) + f(n-1)$ înseamnă $f(n) - f(n-1) \geq f(n+1) - f(n)$, sau $a_n \geq a_{n+1}$.

Din (1) rezultă $f(n+p) \leq f(n) + pa_n$, iar din (2) rezultă $f(n-p) \leq f(n) - pa_n$, $\forall\, p \in \mathbf{N}$.

Dacă $\exists\, n \in \mathbf{Z}$, astfel încât $a_n > 0$, atunci $\forall\, p \in \mathbf{N}$, $f(n-p) < f(n) - pa_n$. Cum $f(n-p) \geq m$, $\forall\, n, p \in \mathbf{Z}$, rezultă $m \leq f(n) - pa_n$, $\forall\, p \in \mathbf{N}$, fals.

Dacă $\exists\, n \subset \mathbf{Z}$, astfel încât $a_n < 0$, atunci $f(n+p) \leq f(n) + pa_n$, $\forall\, p \in \mathbf{N}$, adică $m \leq f(n) + pa_n$, $\forall\, p \in \mathbf{N}$, fals.

Deci $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbf{Z}$ şi atunci funcția f este constantă.